4

الذبذبات القسرية في الدارة RLC متوالية

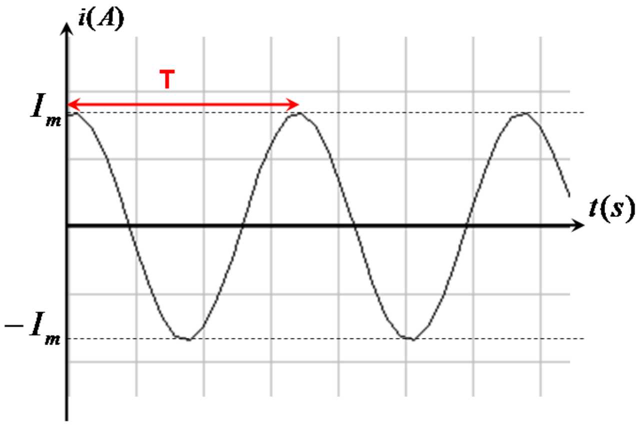
Les oscillations forcées dans un circuit RLC série

I – النظام المتناوب الجيبي :

1 – خاصيات التيار المتناوب الجيبي :

أ – شدة التيار المتناوب الجيبي :

التيار المتناوب الجيبي اللحظي شدته دالة جيبية بالنسبة للزمن :



حيث : $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$

I_m : الشدة القصوية للتيار

ω : نبض التيار ب **rad**

$\omega t + \varphi_i$: طور $i(t)$ عند اللحظة ذات التاريخ t

φ_i : طور $i(t)$ عند أصل التواريخ.

تقاس الشدة الفعالة I بواسطة جهاز الأمبير متر و تربطها ب I_m بالعلاقة التالية : $I = \dfrac{I_m}{\sqrt{2}}$

ب – التوتر المتناوب الجيبي :

التوتر المتناوب الجيبي توتر دالته جيبية بالنسبة للزمن تكتب :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

U_m : التوتر القصوي يقاس بواسطة راسم التذبذب.

ω : نبض التوتر ب **rad**

$\omega t + \varphi_u$: طور $u(t)$ عند اللحظة ذات التاريخ t

φ_u : طور $u(t)$ عند أصل التواريخ.

يقاس التوتر الفعال U بواسطة جهاز الفولطمتر و تربطه ب U_m بالعلاقة التالية : $U = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$

2 – طور التوتر بالنسبة للتيار :

نعتبر : $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$

$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$

فرق الطور بين $u(t)$ و $i(t)$ هو $\varphi = \varphi_u - \varphi i$

- تسمى φ طور التوتر $u(t)$ بالنسبة للشدة $i(t)$ و هو مقدار جبري ب **rad** .

- تمكن φ من قياس أو تأخر التوتر $u(t)$ بالنسبة للشدة $i(t)$:

- إذا كانت $\varphi > 0$ فإن التوتر $u(t)$ متقدم في الطور على $i(t)$.
- إذا كانت $\varphi < 0$ فإن التوتر $u(t)$ متأخر في الطور على $i(t)$.
- إذا كانت $\varphi = 0$ فإن التوتر $u(t)$ و $i(t)$ على توافق في الطور.

❖ ***ملحوظة :***

باعتبار الشروط البدئية $i(t=0)=0$ تكون $\varphi_i = 0$ و بالتالي $\varphi = \varphi_u$

إذن طور شدة التيار هو أصل الأطوار $(\varphi_i = 0)$:

و بالتالي : $i(t) = I_m \cos(\omega t)$

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

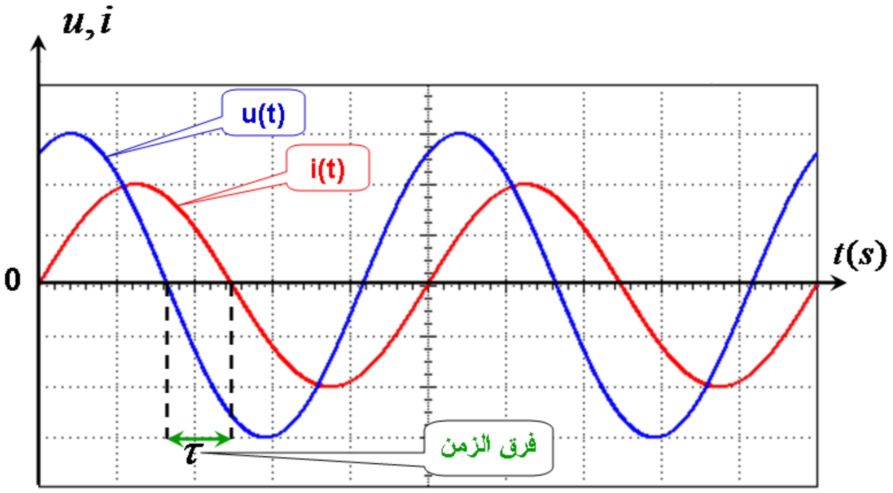
$$u(t) = U_m \cos\left(\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right)$$

$$u(t) = U_m \cos(\omega(t + \tau))$$

و بالتالي يوافق توتر الطور للتوتر $u(t)$ بالنسبة للشدة $i(t)$ المدة الزمنية τ.

حيث $\tau = \frac{\varphi}{\omega}$ مع τ : تسمى الفرق الزمني بين $u(t)$ و $i(t)$.

و يُمَكِنُ قياس τ على شاشة راسم التذبذب من تحديد القيمة المطلقة للطور φ . $|\varphi| = 2\pi \frac{\tau}{T}$

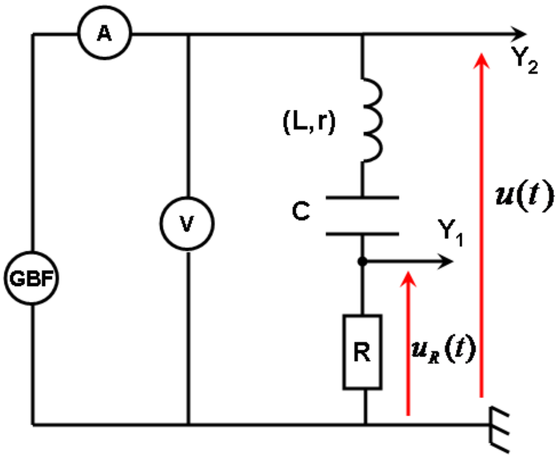


التوتر $u(t)$ متقدم في الطور على $i(t)$ (يصل $u(t)$ إلى القمة $i(t)$ $\varphi > 0$)

II – دراسة دارة RLC متوالية في نظام جيبي و قسري :

1 – التركيب التجريبي :

نعتبر التركيب الكهربائي التالي :



يزود المولد GBF الدارة RLC المتوالية بتوتر متناوب جيبي : $u(t)=U_m\cos(\omega t+\varphi)$

فيظهر في الدارة RLC المتوالية تيار كهربائي شدته $i(t)=I_m\cos(\omega t)$

حيث تمثل $i(t)$ استجابة الدارة RLC المتوالية للإشارة التي يفرضها المولد.

- تسمى الدارة RLC بالرنان و المولد GBF بالمثير.

- نعاين على شاشة راسم التذبذب في المدخل y_1 التوتر $u_R(t)$ بين مربطي الموصل الأومي و الموصل و المدخل y_2 التوتر $u(t)$ بين مربطي المولد.

حسب قانون أوم لدينا : $u_R(t)=R.i(t) \quad \Rightarrow \quad i(t)=\dfrac{u_R(t)}{R}$

مما يدل على أن التوتر المعاين عند المدخل y_1 يتناسب اطرادا مع شدة التيار $i(t)$.

- المنحنيين $i(t)$ و $u(t)$ لهما نفس التردد N (الدور T) مخالف للتردد الخاص للرنان مما يدل على أن الدارة RLC مقر ذبذبات كهربائية قسرية مفروضة من طرف المثير (مولد GBF).

- يتعلق اختلاف الطور بين $u(t)$ و $i(t)$ بتردد المولد.

2 – مفهوم الممانعة : notion de l'impédance

❖ تعريف :

الممانعة Z لثنائي القطب هي خارج قسمة التوتر الأقصى u_m المطبق بين مربطيه على الدة القصوى I_m للتيار المار فيه و هي مقدار فيزيائي يميز ثنائي القطب بالنسبة لتردد معين : $\boxed{Z=\dfrac{U_m}{I_m}}$

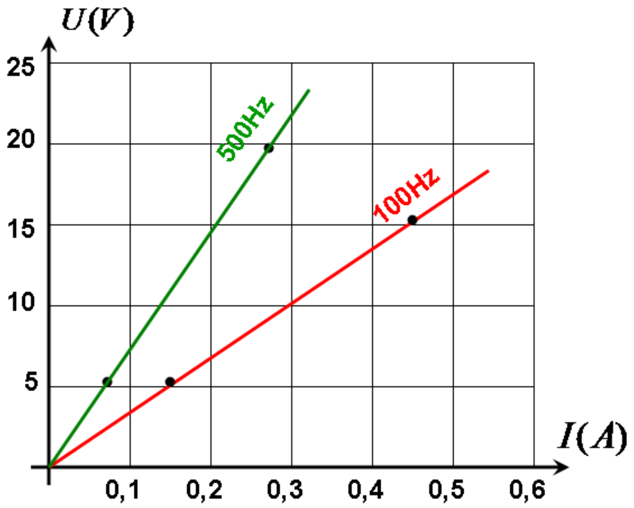
بما أن $U_m=U\sqrt{2}$ و $I=I_m\sqrt{2}$ ومنه $\boxed{Z=\dfrac{U_m}{I_m}=\dfrac{U}{I}}$

❖ مثال :

- نحتفظ بقيمة تردد ثابتة $N_1=100Hz$ و نغير التوتر الفعال U الذي يعطيه GBF و نقيس كل مرة الشدة الفعالة I :

- نضبط تردد GBF على قيمة جديدة $N_2=500Hz$ ونعيد نفس التجربة.

	$U(V)$	5	10	15	20
$N_1=100Hz$	$I(A)$	0,07	0,13	0,20	0,27
$N_2=500Hz$	$I(A)$	015	0,30	0,45	0,60



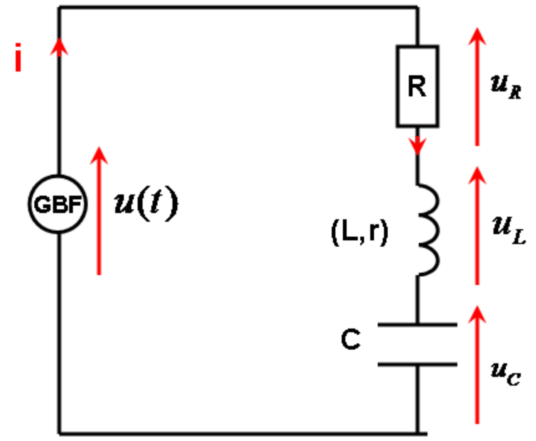
الدالة عبارة عن دالة خطية $U = Z.I$ يسمى Z : المعامل الموجه بالممانعة , نلاحظ أن الممانعة تتعلق بالتردد.

3 – الدراسة النظرية للدارة RLC المتوالية :

أ – المعادلة التفاضلية للدارة :

نعتبر الدارة RLC المتوالية و نختار طور شدة التيار $i(t)$ أصلا للأطوار $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ و التوتر اللحظي

$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ مع φ طور $u(t)$ بالنسبة ل $i(t)$



بتطبيق قانون إضافية التوترات : $u = u_R + u_L + u_C$

لدينا حسب قانون أوم : $u_R(t) = R.i(t)$

و لدينا $u_L = L\dfrac{di}{dt}$ مع $r = 0$

و بما أن $i = \dfrac{dq}{dt} \Leftarrow dq = idt \Leftarrow q = \int dq = \int idt$

و $u_C = \dfrac{1}{C}\int_0^t idt$

وهي المعادلة التفاضلية للدارة RLC المتوالية : $$\boxed{u = R.i(t) + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t idt}$$

بما أن : $i(t) = I_m \cos(\omega t)$

$$u = RI_m\cos(\omega t) + L\frac{d}{dt}I_m\cos(\omega t) + \frac{1}{C}\int_0^t I_m\cos(\omega t)dt$$

$$u = RI_m\cos(\omega t) - L\omega I_m\sin(\omega t) + \frac{I_m}{C\omega}\sin(\omega t)$$

$$u = RI_m\cos(\omega t) + L\omega I_m\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{I_m}{C\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

مع :

$$u(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi)$$

ب – حل المعادلة التفاضلية – إنشاء فرينيل :

في معلم متعامد ممنظم يمكن أن نقرن (associer) كل دالة جيبية $x = X_m\cos(\omega t + \varphi)$ بمتجهة $\overrightarrow{OM}$ تسمى **متجهة فرينيل** يمثل عادة عند اللحظة $t = 0$ حيث :

- أصلها O هو أصل المعلم.
- منظمها هو سع الدالة الجيبية $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = X_m$
- الزاوية التي تكونها $\overrightarrow{OM}$ مع أصل الأطوار $\left(\overrightarrow{Oi}\right)$ و هي $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{Oi}}\right)$

❖ إنشاء فرينيل :

لإنجاز مجموع الدالات الجيبية الثلاث التي لها النبض نقوم بإنشاء فرينيل :

نقرن $RI_m\cos(\omega t)$ بالمتجهة $\vec{V}_1$ حيث :

$$\vec{V}_1\begin{cases}\left\|\vec{V}_1\right\| = R.I_m\\ \left(\vec{V}_1,\vec{oi}\right) = \varphi = 0\end{cases}$$

نقرن $L\omega I_m\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ بالمتجهة $\vec{V}_2$ حيث :

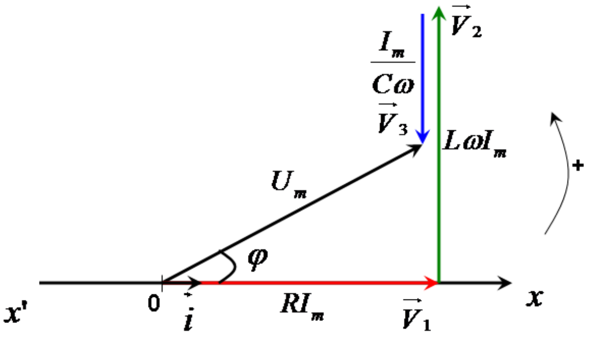
$$\vec{V}_2\begin{cases}\left\|\vec{V}_2\right\| = L\omega I_m\\ \left(\vec{V}_2,\vec{oi}\right) = \varphi = \frac{\pi}{2}\end{cases}$$

نقرن $\frac{I_m}{C\omega}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ بالمتجهة $\vec{V}_3$ حيث :

$$\vec{V}_3\begin{cases}\left\|\vec{V}_3\right\| = L\omega I_m\\ \left(\vec{V}_3,\vec{oi}\right) = \varphi = -\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

نقرن $u = U_m\cos(\omega t + \varphi)$ بالمتجهة $\vec{V}$ حيث : $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$

نحصل على الانشاء الهندسي :



وحسب مبرهنة فيتاغورس :

$$u_m^2 = (RI_m)^2 + \left(L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega}\right)^2$$

$$u_m^2 = \left[R^2 + \left(L\omega I - \frac{1}{C\omega}\right)^2\right] I_m^2$$

لدينا : $Z = \dfrac{u_m}{I_m}$

$$Z = \frac{u_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

ممانعة الدارة :

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

❖ طور التوتر بالنسبة للتيار :

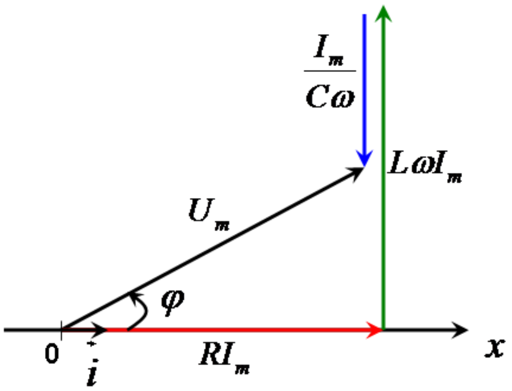
لدينا من خلال المثلث : $\tan\varphi = \dfrac{V_2 - V_3}{V_1}$ أي $\tan\varphi = \dfrac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$

$\cos\varphi = \dfrac{V_1}{V} = \dfrac{RI_m}{U_m} = \dfrac{R}{Z}$ أي $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z}$

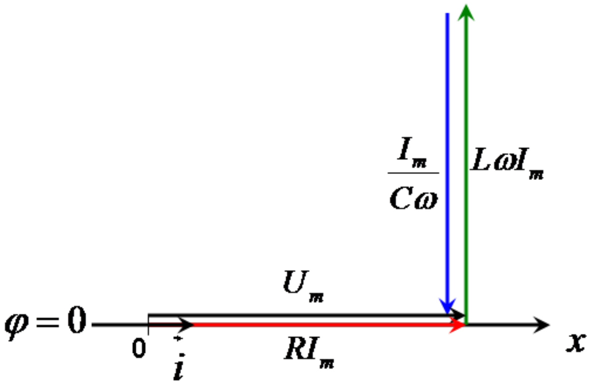
إذن من تعبيري Z و φ فهما يتعلقان بالتردد

❖ ملحوظة :

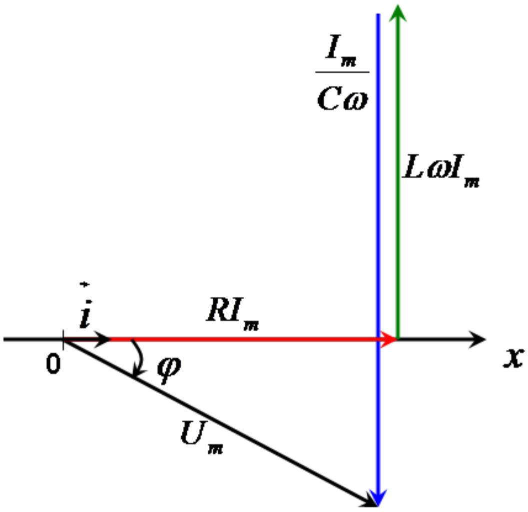
- إذا كانت $\varphi > 0$ فإن $u(t)$ متقدم في الطور على $i(t)$ في هذه الحالة تكون $\tan\varphi > 0$ أي أن : $L\omega > \dfrac{1}{C\omega}$ يكون التأثير التحريضي متفوق على التأثير الكثافي :



- إذا كانت $\varphi = 0$ فإن $u(t)$ و $i(t)$ على توافق في الطور في هذه الحالة تكون $\tan\varphi = 0$ أي أن : $L\omega = \dfrac{1}{C\omega}$ يكون التأثير التحريضي مساوي للتأثير الكثافي :



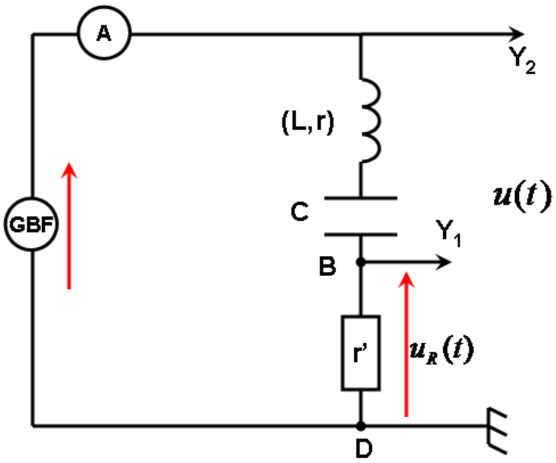
- إذا كانت $\varphi < 0$ فإن $u(t)$ متأخر في الطور على $i(t)$ في هذه الحالة تكون $\tan\varphi < 0$ أي أن : $L\omega < \frac{1}{C\omega}$ يكون التأثير الكثافي متفوق على التأثير التحريضي :



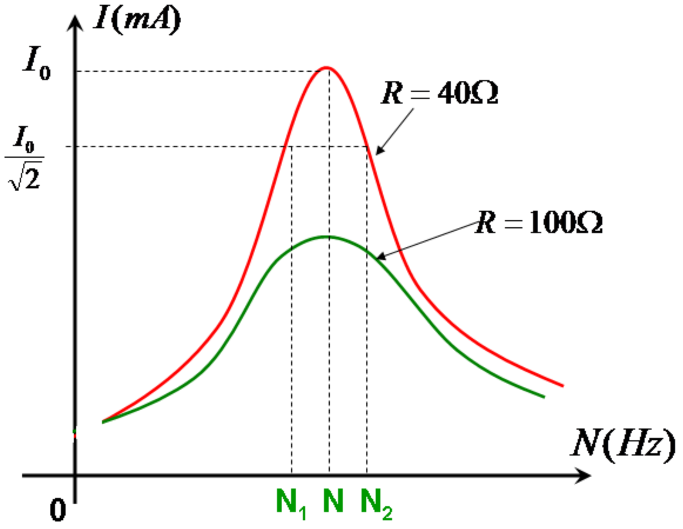
III – ظاهرة الرنين الكهربائي :

1 – الدراسة التجريبية :

نعتبر التركيب الكهربائي التالي :



نبقي التوتر الفعال للمولد ثابتا , ثم نغير تردده N بالنسبة لقيمتين معينتين للمقاومة الكلية للدارة RLC و نقيس بالنسبة لكل تردد شدة التيار الفعالة I فنحصل على منحنى الاستجابة :



أ – قيمة تردد الرنين :

- نلاحظ أن المنحنيين المحصل عليهما يتوفران على قيمتين بارزتين توافقان نفس قيمة التردد N و كيفما كانت المقاومة الكلية R للدارة (التردد عند الرنين لا يتعلق بقيمة مقاومة الدارة).

- تأخذ شدة التيار الفعالة I قيمة قصوى عندما يساوي N تردد المولد (المثير) التردد الخاصة N_0 للدارة RLC (الرنــان).

$N = N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ نقول في هذه الحالة أن الدراة RLC في حالة رنين résonance .

ب – دور المقاومة الكلية للدارة :

- إذا كانت مقاومة الدارة R صغيرة يتوفر منحنى الاستجابة على قمة بارزة نقول أن الرنين حاد aigu .
- إذا كانت مقاومة الدارة R يزول الرنين ويكون منحنى الاستجابة منبسطا , نقول أن الرنين ضبابي flou .

2 – الدراسة النظرية للرنين (المقادير المميزة للرنين) :

أ – التردد عند الرنين :

لدينا : $I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}}$

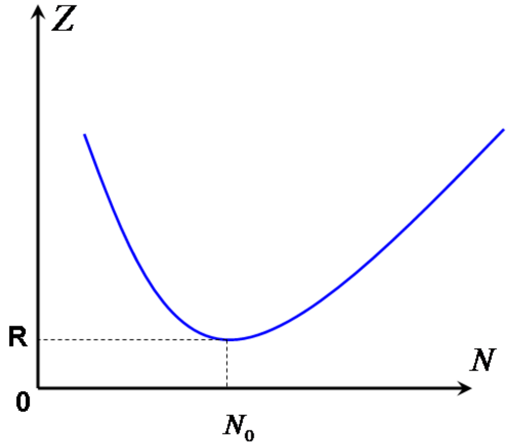
عند الرنين تكون I قصوية أي Z دنوية و يتحقق هذا عندما يكون $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$ أي $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\boxed{N = N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

ب – ممانعة الدارة عند الرنين :

عند الرنين لدينا $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$ أي $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ إذن $\boxed{Z = R}$

لدينا $Z = \sqrt{R^2 + \left(L2\pi N - \frac{1}{C2\pi N}\right)^2}$



يبين منحى $Z = f(t)$ أنه عند الرنين تكون Z دنوية تساوي R.

ج – شدة التيار عند الرنين :

$$I_0 = \frac{U}{R}$$

د – طور التوتر بالنسبة للتيار عند الرنين :

لدينا $\tan\varphi = \dfrac{L\omega - \dfrac{1}{C\omega}}{R}$ و عند الرنين $L\omega - \dfrac{1}{C\omega} = 0$

أي أن $\tan\varphi = 0$ و منه $\varphi = 0$.

عند الرنين يكون التوتر اللحظي المطبق بين مربطي الدارة RLC و الشدة اللحظية $i(t)$ للتيار المار فيهما على توافق في طور.

ه – المنطقة الممررة ذات -3dB (-3décibels) :

❖ تعريف :

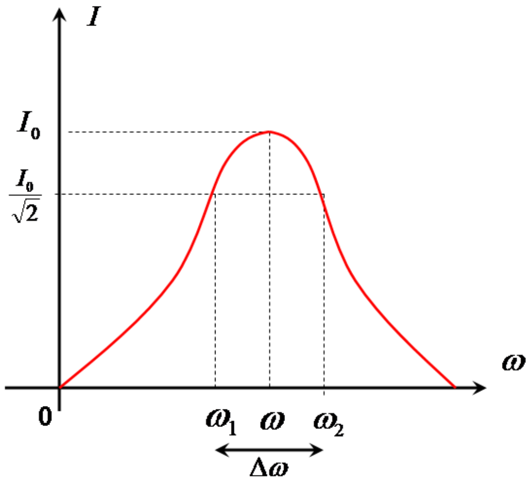
المنطقة الممررة ذات -3dB لدارة RLC هي مجال الترددات $\lfloor N_1, N_2 \rfloor$ للمولد حيث تكون الاستجابة I أكبر أو على الأقل تساوي $I \geq \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$, I_0 الشدة الفعالة عند الرنين.

❖ تحديد عرض المنطقة الممررة :

لدينا الدالة : $I = f(\omega)$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

❖ منحنى الاستجابة :



لنحدد القيمتين ω_1 و ω_2 اللتين تحدان المجال $[\omega_1, \omega_2]$ حيث $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

و عند الرنين $\begin{cases} I_0 = \frac{U}{R} \\ I = \frac{U}{\sqrt{2}R} \end{cases}$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{2}R}$$

$$\sqrt{2}R = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

$$2R^2 = R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

$$R^2 = \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

و بالتالي :

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm R$$

إذن تقبل هذه المعادلة 4 حلول منها حالان موجبان :

$$\omega_2 = \frac{+R + \sqrt{R^2 + 4\frac{L}{C}}}{2L} \quad , \quad \omega_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4\frac{L}{C}}}{2L}$$

إذن عرض المنطقة الممررة هو : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$

بما أن $\Delta N = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ فإن $\Delta N = \frac{R}{2\pi L}$

- يتناسب عرض المنطقة الممررة مع المقاومة الكلية **R** , كلما كانت **R** صغيرة كلما كان الرنين حاد و يكون العرض ΔN صغيرا. و بالتالي تكون الدارة انتقائية .

د – معامل الجودة : facteur de qualité

يعرف معامل الجودة ب $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_0}$ بدون وحدة.

ω_0 : النبض الخاص للدارة RLC

$\Delta\omega$: عرض المنطقة الممررة

و لدينا : $\Delta\omega = \frac{R}{L}$ ومنه $Q = \frac{L\omega_0}{R}$

كلما كانت **R** صغيرة كلما كان معامل الجودة Q كبير.

❖ ملحوظة :

لدينا $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ عند الرنين $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$ و $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

يسمى أحيانا معامل الجودة بمعامل فرط التوتر **surtension**

- تعبير التوتر الفعال بين مربطي المكثف عند الرنين : $U_C = \frac{1}{C\omega_0} I_0$

- تعبير التوتر الفعال بين مربطي الوشيعة عند الرنين : $U_L = L\omega_0 I_0$

- تعبير التوتر الفعال بين مربطي الدارة **RLC**: $U = RI_0$, $R = Z$

ولدينا

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$$

$$Q = \frac{L\omega_0 I_0}{RI_0} = \frac{I_0}{RC\omega_0 I_0}$$

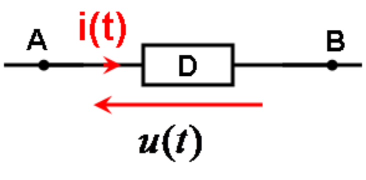
$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U}$$

وعند الرنين تكون Q كبيرة وهذا يعني أن $U_C > U$ و $U_L > U$ مما يدل أنه عند الرنين يظهر فرط التوتر و هي ظاهرة تشكل بعض المخاطر (انبعاث الشرارات و اتلاف بعض عناصر الدارة : مكثف , وشيعة)

IV – القدرة في النظام المتناوب : :

1 – القدرة اللحظية : puissance instantanée

نعتبر ثنائي قطب AB يمر فيه تيار كهربائي شدته اللحظية $i(t) = \sqrt{2}I\cos(\omega t)$ و التوتر اللحظي $u(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \varphi)$:



القدرة اللحظية التي يتبادلها هي :

$$P(t) = u(t).i(t)$$

$$P(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \varphi).\sqrt{2}I\cos(\omega t)$$

$$P(t) = 2UI\cos(\omega t + \varphi).\cos(\omega t)$$

$$P(t) = \frac{2UI}{2}\left[\cos(\omega t + \varphi + \omega t) + \cos(\omega t + \varphi - \omega t)\right]$$

$$P(t) = UI\left[\cos(2\omega t + \varphi) + \cos(\varphi)\right]$$

إذن نلاحظ أن القدرة اللحظية دالة جيبية نبضها هو 2ω ودورها هو $\frac{T}{2}$ حيث T دور $i(t)$ و $u(t)$

2 – القدرة المتوسطة: puissance moyenne

القدرة المتوسطة أو القدرة النشيطة هي مجموع القدرات اللحظية المستهلكة من طرف ثنائي قطب خلال دور واحد T.

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt$$

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T UI[\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)]dt$$

$$P = \frac{UI}{T}\cos\varphi\int_0^T dt + \frac{UI}{T}\int_0^T \cos(2\omega t + \varphi)dt$$

$$P = \frac{UI}{T}\cos\varphi[t]_0^T + \frac{UI}{T}\frac{1}{2\omega}[\sin(2\omega t + \varphi)]_0^T$$

$$P = UI\cos\varphi + \frac{UI}{4\pi}[\sin(4\pi + \varphi) - \sin(\varphi)]$$ مع $\sin 4\pi + \varphi = \sin\varphi$

$$\boxed{P = UI\cos\varphi}$$

- يسمى الجداء $S = UI$ القدرة الظاهرية
- يسمى المعامل $\cos\varphi$ معامل القدرة

❖ ملحوظة :

لدينا الدارة المتوالية RLC :

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \quad \text{و} \quad U = Z.I \quad \text{و} \quad Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I}$$

القدرة المتوسطة المستهلكة : $P = UI\cos\varphi = UI.\frac{R}{Z} = \frac{U.R.I.I}{U}$

القدرة المستهلكة من طرف مقاومة R بمفعول جول : $\boxed{P = R.I^2}$

في حالة $r \neq 0$ $\boxed{P = (R+r)I^2}$